ETSI de CAMINOS, C. Y P. DE MADRID — **Segundo Examen Parcial**

Segundo Curso – MÉTODOS - Matemáticas — 9 de junio de 2011

Alumno______________________________ nº matrícula: ☐☐☐☐☐

NORMAS DEL EXAMEN: 1) Cada ejercicio debe resolverse *en la hoja del enunciado*: no se admiten hojas adicionales. 2) Debe escribirse con tinta azul o negra: no se admite escritura a lápiz ni en color rojo. 3) El DNI del alumno debe estar a la vista sobre la mesa. 4) No está permitido levantarse ni hablar hasta que se hayan recogido los últimos ejercicios y se salga del aula de examen. 5) Se puede disponer sólo del Formulario oficial de la asignatura (sin informaciones adicionales de ningún tipo) y del papel en blanco para uso como borrador.

Ejercicio nº 2.- La *función de corriente* de un campo $\vec{u} = u_1(x, y)\vec{i} + u_2(x, y)\vec{j}$ está dada por $\Psi(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Se pide:

1) Determinar si el campo es *irrotacional*. [4 puntos]

2) En caso afirmativo, calcular un *potencial escalar* y dibujar las *líneas equipotenciales* y las *líneas de corriente* que pasan por el origen. [3 puntos]

3) Calcular la integral del campo $\underline{u}$ a lo largo de la curva $\{\theta = \frac{1}{4}\pi + \frac{\text{sen}(16\pi\rho)}{8},\ 1 \le \rho \le 10\}$. [3 puntos]

Solución: (ver Práctica 4.20).

● 1) Sabemos que Ψ es función de corriente de un campo vectorial $\underline{u}$ del plano $\mathbb{E}_2$ cuando $\underline{\nabla}\times(\Psi(x,y)\underline{k}) = \underline{u}$, así que puede determinarse el campo $\underline{u}$ calculando ese rotacional:

Obtenemos ahora: $$\underline{\nabla}\times\underline{u} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -6xy & -3(x^2-y^2) & 0 \end{vmatrix} = 0\underline{i} - 0\underline{j} + (-6x + 6x)\underline{k} = \underline{0}$$

luego el campo $\underline{u}$ sí es *irrotacional*.

● 2) Siendo polinomios las componentes de $\underline{u}$, el campo es, además de irrotacional, de clase $C^{(\infty)}$ en todo $\mathbb{E}_2$, por lo que existe con seguridad potencial escalar, $f(x, y)$, cuyo gradiente es $\underline{u}$. Para determinarlo usaremos el procedimiento de integración elemental de las E.D.P. que proceden de exigir

$$\underline{\nabla} f = \underline{u} \Leftrightarrow \{\tfrac{\partial f}{\partial x} = u_x = -6xy \text{ (Ec. 1)};\ \tfrac{\partial f}{\partial y} = u_y = -3x^2 + 3y^2 \text{ (Ec. 2)}\}$$

Pero (Ec. 1) $\Rightarrow f(x, y) = -\int 6xy\, \partial x = -3x^2y + h(y)$ (Ec. 3)

luego exigiendo a esta forma de f la (Ec. 2), se tiene: $-3x^2 + h'(y) = -3x^2 + 3y^2 \Rightarrow h'(y) = 3y^2 \Rightarrow h(y) = y^3 + c$

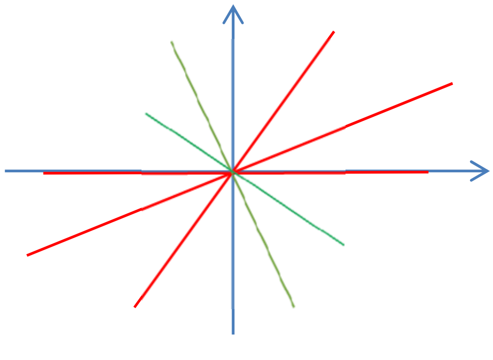
Y en definitiva: $$f(x, y) = -3x^2y + y^3 + c$$

y se comprueba que, efectivamente, $\underline{\nabla} f = \underline{u}$ en todo $\mathbb{E}_2$.

Las líneas equipotenciales son las curvas de ecuación $\{f(x, y) = \text{cte.}\}$ y las líneas de corriente, las de ecuación $\{\Psi(x, y) = \text{cte.}\}$. Las que pasan por el origen, deben determinarse exigiendo a las constantes arbitrarias que las ecuaciones se verifiquen para el (0, 0): en ambos casos resulta que la constante debe anularse, así que las líneas pedidas tienen por ecuaciones:

líneas equipotenc.: $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow -3x^2y + y^3 = 0 \Leftrightarrow y(y^2 - 3x^2) \Leftrightarrow y(y - \sqrt{3}\,x)(y + \sqrt{3}\,x) = 0$

líneas de corriente: $\Psi(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 = x(x^2 - 3y^2) = x(x - \sqrt{3}\,y)(x + \sqrt{3}\,y) = 0$



cada una de las cuales corresponde con tres rectas, que son respectivamente perpendiculares y que se representan en la figura a diferente color.

● 3) La integral pedida $\int_C \underline{u}\cdot d\underline{r}$, por el teorema fundamental del cálculo para integrales de línea, es la diferencia de potencial en los extremos de la curva, es decir, los puntos de coordenadas polares $(1, \frac{\pi}{4})$ y $(10, \frac{\pi}{4})$, o sea, en cartesianas: $(5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$

$$\int_C \underline{u}\cdot d\underline{r} = f(5\sqrt{2}, 5\sqrt{2}) - f(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \ldots = \frac{999\sqrt{2}}{2}$$ #.